IV Colóquio de Filosofia Física e Matemática
"DETERMINISMO & CAOS"
Centro de Ciências e Humanidades • Universidade Presbiteriana Mackenzie
11 – 13 de maio de 2011

Primus Vitam
Revista de Ciências e Humanidades

Probabilidades

Wagner de Souza Borges
UPM, Brasil
wborges@mackenzie.br

Resumo: *Desde a antiguidade, filósofos, físicos e matemáticos dedicam-se à tarefa de compreender e dar um sentido ao que expressamos com os termos "evento aleatório" e "probabilidade". Nessa tarefa, entretanto, as divergências cuidaram de dividir os estudiosos em diferentes correntes de pensamento acerca do conceito de probabilidade, entre as quais três se destacam: o "frequentismo", defendido por aqueles que entendem probabilidade como "intensidade de ocorrência"; o "subjetivismo", defendido pelos que entendem probabilidade como "grau individual de convencimento em uma ocorrência", expresso por sua disposição em "agir" de alguma forma específica; e o "logicismo", defendido pelos que entendem probabilidade como "noção lógica relacional" a ser valorada relativamente a um corpo de "evidência". Neste artigo, diferentes interpretações do conceito de probabilidade vinculadas a essas linhas de pensamento são apresentadas com o objetivo de introduzir aspectos fundamentais do cálculo de probabilidades para um público mais amplo.*

Palavras-chave: *Probabilidade; Frequentismo; Logicismo; Subjetivismo.*

Abstract: *Since ancient times, philosophers, physicists, and mathematicians dedicate themselves to understand and give precise meaning to what we are expressing when we use the terms "random event" and "probability". In conducting their task, however, divergence has taken care of splitting scholars into lines of thought concerning the concept of probability, three of which stand out: "frequentism", supported by those who understand probability as an "intensity of occurrence"; "subjectivism", supported by those who understand probability as an "individual measure of convincement of an occurrence", as expressed by his willingness to "act" in some distinctive way; and "logicism", supported by those who understand probability as a "logic relational notion", to be valued relative to a body of "evidence". In this paper, different interpretations of probability linked to these lines of thought are presented in order to introduce fundamental aspects of the probability calculus to a wider public.*

Keywords: *Probability; Frequentism; Logicism; Subjectivism.*

1. INTRODUÇÃO

Todos nós, de uma maneira ou de outra, nos encontramos, com frequência, diante de situações em que a ocorrência de um determinado evento é apenas uma possibilidade. Podemos acreditar muito ou pouco, ter uma grande ou uma pequena esperança na ocorrência desse evento, mas não podemos ter certeza de que ele irá ou não ocorrer. Não existem causas acessíveis ou controláveis que determinam sua ocorrência. Se a força dessa crença ou expectativa é produto de nosso conhecimento ou fé, pouco importa, estamos vivenciando, segundo Deborah J. Bennett (1998), "a chance encounter" — ou "processo aleatório", como passaremos a denominá-lo doravante.

Situações dessa natureza estão presentes em diversas atividades na história das antigas civilizações, envolvendo de jogos de tabuleiro a práticas divinatórias conhecidas a pelo menos 2700 anos A.C.. Elas despertaram o interesse de vários filósofos e cientistas desde a primeira metade do século 5º A. C., mas o entendimento dos conceitos de aleatoriedade e chance não convergiu ao longo da história. Motivos religiosos, além da inexistência de um conceito formal de chance ou aleatoriedade teriam ainda, segundo Florence Nightingale David (1955,1962), Maurice George Kendall (1956) e Ian Hacking (1975), dificultado o desenvolvimento de uma teoria matemática de chances muito antes da segunda metade do século 16, quando os primeiros passos nesse sentido foram efetivamente dados. Em um artigo sobre aleatoriedade, por exemplo, o matemático Polonês Mark Kac afirmou:

> I am convinced that the vast majority of my readers, and in fact the vast majority of scientists and even non-scientists, are convinced that they know what "random" is. A toss of a coin is random; so is mutation, and so is the emission of an alpha particle. The motion of the planet Mercury (or any other planet) is not random, and neither is the propagation of an acoustical wave produced by a vibrating string. Simple isn't it?
>
> Well, not quite. If pressed for a definition of randomness, most people will fall back on such formulations as "lack of regularity" or "unpredictability". But they are then faced with the equally difficult task of defining "regularity" or "predictability", and soon find themselves immersed in metaphysics. .... From the purely *operational* point of view, however, the concept of randomness is so elusive as to cease to be viable. (KAC, 1983, p.405-406)

De fato, se a incerteza em um processo aleatório é fruto da nossa ignorância a respeito das forças que determinam o seu desfecho ou da existência de mecanismos inacessíveis inerentes aos recursos e condições que o cicunscrevem e que determinam o seu desfecho de maneira distributivamente peculiar e própria, são questões que estão no centro da discussão filosófica envolvendo as noções de aleatoriedade e chance e que continuam em debate até os dias de hoje (BENNETT, 1998).

Esse debate, entretanto, não impediu o desenvolvimento de teorias para lidar com processos aleatórios, com particular destaque para a teoria axiomática da probabilidade introduzida pelo matemático Russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov em 1933. Essa axiomatização é apresentada na seção 2 deste trabalho.

Nesse ponto, é conveniente esclarecer o significado de alguns termos que serão utilizados com freqüência: ao desfecho (incerto a priori) de um processo aleatório dá-se o nome de "resultado"; além disso, o termo "evento" designa uma proposição acerca do resultado de um processo aleatório, isto é, um atributo aplicável à esse resultado. Assim, ao realizar-se um "ensaio", nome técnico reservado à cada uma das realizações repetidas do processo, quando e se isso for possível, pode-se verificar se o resultado obtido tem ou não esse atributo. Se tem, diz-se que o evento ocorreu. Caso contrário, diz-se que o evento não ocorreu.

O vínculo entre o conceito formal de probabilidade e a noção de aleatoriedade criou dificuldades na aplicação da teoria de Kolmogorov em diferentes áreas. Interpretações plausíveis para o conceito de probabilidade tornaram-se necessárias e diferentes correntes de pensamento emergiram. Assim, destacaram-se: o "frequentismo", defendido por aqueles que entendem probabilidade como "intensidade de ocorrência"; o "subjetivismo", defendido pelos que entendem probabilidade como “grau individual de convencimento em uma ocorrência”, expresso por uma disposição em “agir” de alguma forma específica; e o “logicismo”, defendido pelos que entendem probabilidade como “noção lógica relacional” a ser valorada relativamente a um corpo de “evidência”. Donald Gillies (2006) identifica ainda uma quarta corrente de pensamento, defendida pelos que entendem probabilidade como uma “propensão” inerente ao processo aleatório, que se expressa por uma “intensidade de ocorrência” que dela decorre. Embora não haja um termo especialmente cunhado para nomear esta corrente, a interpretação do conceito de probabilidade que defende é comumente denominada “propensional”.

As diferentes interpretações do conceito de probabilidade nas diferentes correntes de opinião, todavia, são distinguidas na literatura especializada por seu caráter “objetivista” ou “epistêmico”, como prefere Gillies. A natureza dessa dicotomia é descrita na seção 3. Na mesma seção, diferentes interpretações do conceito de probabilidade são apresentadas, com o destaque de algumas passagens da literatura especializada que descrevem aspectos importantes sobre o tema.

2. CHANCE OU PROBABILIDADE?

O uso dos termos “chance” (*chance*), “provável” (*probable*), e “probabilidade” (*probability*) têm uma longa trajetória na história no cálculo de probabilidades. O termo “chance”, entretanto, esteve muito mais ligado aos jogos de azar ou sorte (*games of chance*) do que os termos “provável” (*probable*), e “probabilidade” (*probability*). Aristóteles, por exemplo, reservava os termos “provável” e “probabilidade” para o que considerava “eventos que ocorrem na maioria dos casos”. Para ele, resultados de jogos de azar ou sorte eram “eventos imprevisíveis ou que ocorrem puramente ao acaso” e que por isso não poderiam constituir objeto de investigação científica (HALD, 2003). Segundo Anders Hald, “Aristotle’s concept of probability is epistemic and nonquantitative. His probable events are events that, on the given evidence, happen with a high degree of probability” (HALD, 2003 p.30). Essa postura filosófica teria ainda, segundo Kendall (1956) e S. Sambursky (1956) embotado o insight Grego em direção ao desenvolvimento de uma teoria axiomática da probabilidade.

Segundo o *Britannica Guide to Statistics and Probability* (BRITANNICA, 2011), praticamente até o século 18 o termo “provável” era aplicado a crenças que pareciam plausíveis, procediam de fontes fidedignas ou que simplesmente mereciam aprovação.

> Probability, in this sense, was emphasized in England and France from the late 17th century as an answer to skepticism. Man may not be able to attain perfect knowledge but can know enough to make decisions about the problems of daily life. The new experimental natural philosophy of the later 17th century was associated with this more modest ambition, one that did not insist on logical proof. (BRITANNICA, 2011 p.26)

Em sua introdução do livro *The Analogy of Religion*, publicado pela primeira vez em 1736, por exemplo, Joseph Butler, Bispo de Durham, teólogo, apologista, e filósofo, destaca:

> Probable evidence, in its very nature, affords but an imperfect kind of information; and is to be considered as relative only to beings of limited capacities. For nothing which is the possible object of knowledge, whether past, present, or future, can be probable to an infinite Intelligence; since it cannot but be discerned absolutely as it is in itself – certainly true, or certainly false. But to us, probability is the very guide of life. (BUTLER, 1852 p.73)

Para Butler, portanto, “probabilidade” só existe como fruto da ignorância, ou da “inteligência finita” e tem, de fato, o caráter de crença plausível. Ele não descarta, entretanto, a sua interpretação como medida de crença parcial, que em sua opinião pertence ao terreno da Lógica:

> It is not my design to inquire further into nature, the foundation, and measure of probability; or whence it proceeds that likeness should beget that presumption, opinion,

> and full conviction, which the human mind is formed to receive from it, and which does necessarily produce in every one; or to guard against the errors to which reasoning from analogy is liable. This belongs to the subject of Logic, and is a part of that subject which has not yet been thoroughly considered. … (BUTLER, 1852 p.74)

A partir de meados do século 16, vários trabalhos foram dedicados à numerização e à fusão dos conceitos de “chance” e “probabilidade”. Entre as primeiras contribuições importantes desse movimento encontram-se: *La Logique ou L’Art de Penser*, escrita pelos Jansenistas Antoine Arnould e Pierre Nicole em 1662 (ARNAULD e NICOLE, 1662); *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, um curto ensaio sobre o raciocínio em jogos de sorte ou azar escrito pelo matemático Holandês Christiaan Huygens, publicado em 1657 (HUYGENS, 1657); e a extensa correspondência entre Pierre de Fermat e Blaise Pascal, em torno de 1654 (DEVLIN, 2010), para resolver problemas apresentados a este último por Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, um aficionado por jogos de sorte ou azar. Um desses problemas (DEVLIN, 2008), consistia em determinar a forma justa de dividir o total das apostas em um jogo interrompido antes do final e em sua resolução Pascal elaborou o primeiro desenvolvimento explícito do conceito de esperança matemática, presente também, de uma forma muito sutil, no trabalho de Huygens.

Outra referência histórica, embora nem sempre lembrada com o mesmo entusiasmo, é o livro sobre jogos de sorte ou azar (CARDANO, 1953, 1966), desenvolvido por Girolamo Cardano durante um período de quase 40 anos, em meados do século 16, e publicado somente em 1633. Segundo David Bellhouse (2005), até a publicação do ensaio de Huygens, o trabalho de Cardano apresentava o tratamento mais completo do cálculo de “chances” da época. O único texto contendo uma discussão detalhada dos cálculos e das suposições subjacentes. Nesse trabalho, Cardano oferecia ainda orientação e advertências aos que desejassem jogar.

A essas contribuições, seguiram-se ainda obras importantíssimas sobre o “cálculo de probabilidades”, como: *Ars Conjectandi*, escrita pelo matemático Suíço Jacob Bernoulli, publicada (postumamente) em 1713 (BERNOULLI, 1713); *Doctrine of Chances. A Method of Calculating the Probability of Events in Play*, escrita pelo matemático Frances Abraham De Moivre em 1718 (De MOIVRE, 1718); *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of* Chances, escrita pelo matemático e ministro presbiteriano Inglês Thomas Bayes, publicada em 1763 (BAYES, 1763); *Théorie Analytique des Probabilités* e *Essai Philosophique sur les Probabilités*, escritas pelo matemático, astrônomo e físico Francês, Pierre Simon, Marques de Laplace, publicadas em 1812 (LAPLACE, 1812) e 1825 (LAPLACE, 1825), respectivamente.

2.1. A teoria axiomática de Kolmogorov

Em *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, Ergebnisse Der Mathematik*, pubicado em 1933, o matemático Russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov formulou a primeira teoria matemática bem fundamentada para o cálculo de probabilidades. Seu ponto de partida é a noção de “espaço de probabilidade”, a estrutura matemática adequada, segundo Kolmogorov, para descrever ou modelar um processo aleatório ψ. Especificamente: uma tripla (S, Σ_S, P) em que:

- S é um conjunto não vazio, comumente denominado “espaço amostral”;
- Σ_S é uma σ-álgebra de subconjuntos de S; e
- Uma função de conjunto, $P: \Sigma_S \to [0,1]$, σ-aditiva e tal que $P(S)=1$.

O vínculo entre o espaço de probabilidade (S, Σ_S, P) e o processo aleatório subjacente, ψ, se dá no seguinte contexto:

- Os elementos de S representam os possíveis resultados de ψ;
- Os elementos de Σ_S representam eventos que serão valorados em termos de probabilidades, isto é, proposições privilegiadas acerca do resultado de ψ. A estrutura de σ-álgebra garante que operações lógicas com eventos constituam eventos. Em termos matemáticos, isso é expresso pelas seguintes propriedades: $S \in \Sigma_S$; Σ_S é fechada por complementação ($A \in \Sigma_S \Rightarrow A^c \in \Sigma_S$) e uniões enumeráveis ($\Gamma \subset \Sigma_S$, Γ enumerável $\Rightarrow$

$\cup\Gamma\in\Sigma_S$). Em particular, $S\in\Sigma_S$ representa qualquer tautologia e $\varnothing=S^c\in\Sigma_S$ representa qualquer impossibilidade;

- A função P sintetiza uma valoração das probabilidades dos eventos em uma realização de ψ. O requisito P(S)=1 e a σ-aditividade de P (se $\Gamma\subset\Sigma_S$ é enumerável e tal que $A\cap B=\varnothing$ se $A,B\in\Gamma$ e $A\neq B$, então $P(\cup\Gamma)=\Sigma_{A\in\Gamma}\ P(A)$) consolidam os axiomas do cálculo de probabilidades.

Apesar da alavancagem que a teoria de Kolmogorov proporcionou em diferentes áreas do conhecimento, não há consenso entre probabilistas e principalmente entre estatísticos, sobre a necessidade de se postular a σ-aditividade de P. Vários filósofos da estatística, entre eles, Bruno De Finetti (1974) e Leonard Savage (1954), por exemplo, defendem, com base em argumentos distintos, apenas a sua aditividade, isto é, se $A,B\in\Sigma_S$ e $A\cap B=\varnothing$, então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Entretanto, se P(S)=1 e P é aditiva, uma condição necessária e suficiente para que P seja σ-aditiva é que P seja "contínua por cima no vazio", isto é,

- se $A_1, A_2, ...\in\Sigma_S$, $A_1\supset A_2\supset$ ... e $\cap\{A_1,A_2,...\}=\varnothing$, então $P(A_n)$ converge para 0.

Assim, a objeção, de fato, é com relação à continuidade de P por cima no vazio.

Kolmogorov (1933) justifica a σ-aditividade de P como uma necessidade matemática para viabilizar o tratamento adequado de espaços de probabilidade em que o número de elementos de *S* é infinito. Essa justificativa, entretanto, é rejeitada por matemáticos como Frank P. Ramsey (1926), Bruno De Finetti (1933, 1974) e Leonard Savage (1954), por exemplo, com base em resultados matemáticos que estabelecem um forte vínculo de afinidade entre as interpretações do conceito de probabilidade que defendem e medidas de probabilidade aditivas, isto é, funções de conjunto aditivas, $P:\Sigma_S \rightarrow[0,1]$, tais que P(S)=1. Nesse contexto, o leitor interessado encontrará argumentos particularmente interessantes em (KADANE, SCHERVISH e SEIDENFELD, 1981) e (SEIDENFELD e SCHERVISH, 1983).

Ao desenvolver sua teoria, Kolmogorov não se ocupou de discutir para que interpretação do conceito de probabilidade ela era adequada. Nas aplicações, entretanto, as probabilidades precisam ser valoradas e isso carece de uma interpretação. De fato, é comum encontrar em livros textos voltados para o ensino do cálculo de probabilidades, a construção de modelos, através de procedimentos convencionais de extensão, em que as valorações de partida são justificadas por meio de argumentos envolvendo interpretações específicas do conceito de probabilidade.

2.2. Objetivismo e Subjetivismo.

Quando se diz ou se escreve que a distância entre dois pontos, *A* e *B*, de uma superfície esférica de raio *r = 20 cm* é igual a *12 cm*, se está comunicando um fato preciso, algo sobre o qual não há a menor possibilidade de dúvida: há uma forma matemática precisa de se caracterizar/identificar os pontos dessa superfície (o lugar geométrico); uma definição precisa de distância entre dois quaisquer de seus pontos; e uma forma rigorosamente correta de se calcular essa distância. Entretanto, quando se diz, num determinado contexto, que a probabilidade de um evento *E* ocorrer (em uma realização de um processo aleatório) é igual a ¾, não há um consenso sobre o significado dessa afirmação. O que isso quer efetivamente dizer, e como se determina o valor dessa probabilidade, são perguntas que requerem resposta.

No que diz respeito à primeira questão, a maioria dos filósofos concorda que há duas categorias de interpretações do conceito de probabilidade. Donald Gillies (2006), por exemplo, distingue essas categorias denominando-as "epistêmicas" e "objetivas":

> Epistemological interpretations of probability take probability to be concerned with the knowledge or belief of human beings. On this approach probability measures degree of knowledge, degree of rational belief, degree of belief, or something of this sort. … . Objective interpretations of probability, by contrast, take probability to be a feature of the objective material world, which has nothing to do with human knowledge or belief. (GILLIES, 2006 p.2)

É mais comum, entretanto, encontrarmos na literatura as denominações "objetivas" e "subjetivas", em alusão ao sentido metafísico desses termos.

Segundo a visão "objetiva", a impossibilidade de assegurar, diante de um processo aleatório, se um evento irá ou não ocorrer em um ensaio, deve-se à inacessibilidade ao mecanismo que determina o resultado do processo, independentemente do que se acredita ou do que se conhece. Nesse contexto, a probabilidade um evento expressa o grau de possibilidade de sua ocorrência em um ensaio, intrínseca ao processo.

Interpretações "subjetivas", por outro lado, seriam as que rejeitam essa intrinsecidade. Segundo a visão "subjetiva", a impossibilidade de assegurar, diante de um processo aleatório, se um evento irá ou não ocorrer em um ensaio, deve-se a limitações no estado de conhecimento, que pode variar de indivíduo para indivíduo. Nesse contexto, a probabilidade um evento expressa um julgamento individual de valor sobre a possibilidade do evento ocorrer naquele ensaio, isto é, a força de sua crença nessa ocorrência. Segundo Arnold Baise "Any theory of probability that rejects this objective view is therefore subjective in the metaphysical sense. For such a theory, probability is regarded as being 'in the mind' as it were, i.e. as a concept derived from our experience of uncertainty in the world" (BAISE, 2011 p.2). Baise faz questão de ressaltar o sentido metafísico da interpretação subjetiva, na medida em que:

> This (metaphysically) subjective position can in turn give rise to two different approaches: objective and subjective, these terms now referring to their *epistemological* status, i.e. how the knowledge needed to assign a probability is acquired. The objective approach is represented by Jaynes (2005) and earlier probability theorists such as Harold Jeffreys (1961), and the subjective approach is associated primarily
> with Bruno de Finetti (1974). Followers of both approaches rely on Bayesian analysis, i.e. the use of Bayes's theorem, to calculate probabilities. In order to illustrate their basic difference, the essentials of the Bayesian approach need to be described. (BAISE, 2011 p.2)

2.3. Valoração de uma Probabilidade e o Problema da Indução.

Julgar se uma particular interpretação do conceito de probabilidade é ou não adequada requer o estabelecimento de critérios de avaliação. Wesley Salmon (1967), por exemplo, estabelece três critérios básicos que residem no seguinte questionamento:

- É possível, pelo menos em princípio, calcular (e assegurar) o valor da probabilidade de um evento?
- Essas probabilidades têm significância preditiva prática?
- A probabilidade de ocorrer pelo menos um entre dois eventos incompatíveis é igual à soma das probabilidades desses eventos?
- Um evento tautológico tem probabilidade 1?

A primeira dessas perguntas verifica se a interpretação é a "assegurável" (*ascertainable* é o termo utilizado por Salmon). A segunda, verifica se a interpretação é "aplicável", e as duas últimas se ela é "admissível", isto é, compatível com os axiomas do cálculo de probabilidades ($P: \Sigma_S \rightarrow [0,1]$ é aditiva e tal que $P(S)=1$).

Os critérios de "admissibilidade" e a "aplicabilidade" não são frutos de uma admiração pessoal de Salmon pela beleza matemática e o sucesso do cálculo de probabilidades introduzido por Kolmogorov (1933), principalmente como base formal para a inferência estatística. Trata-se, antes de tudo, de reconhecer o longo e cuidadoso desenvolvimento da teoria, em sintonia com um vasto repertório de aplicações práticas e teóricas. Com relação a "assegurabilidade", entretanto, Salmon alinha sua discussão com o problema da indução em Hume, na medida em que a valoração de probabilidades, em diferentes interpretações, mantém uma estreita relação de afinidade com processos de inferência indutiva típicos do método científico. Segundo Salmon (1967), apesar da importância e do interesse que estudos empíricos tenham representado para o avanço da ciência, não se pode ignorar que:

> ... empirical investigations may enable us to describe the ways in which people arrive at beliefs about unobserved facts, but they leave open the question whether beliefs arrived at in this way actually constitute *knowledge*. …
>
> One of the basic differences between knowledge and belief is that knowledge must be founded upon evidence – i.e., it must be belief founded upon some rational justification. To say that certain methods yield knowledge of the unobserved is to make a cognitive claim for them. Hume called into question the justification of such cognitive claims. The answer cannot be found entirely within an empirical study of human behavior, for a *logical* problem has been raised. It is the problem of understanding the logical relationship between evidence and conclusion in logically correct inferences. It is the problem of determining whether the inferences by which we attempt to make the transition from knowledge of the observed to knowledge of the unobserved are logically correct. The fact that people do or do not use a certain type of inference is irrelevant to its justifiability. Whether people have confidence in the correctness of a certain type of inference has nothing to do with whether such confidence is justified. If we should adopt a logically incorrect method for inferring one fact from others, these facts would not actually constitute evidence for the conclusion we have drawn. The problem of induction is the problem of explicating the very concept of *inductive evidence*. (SALMON, 1967 p. 6)

3. INTERPRETAÇÕES DO CONCEITO DE PROBABILIDADE

Vários trabalhos importantes apresentam e discutem as diferentes interpretações do conceito de probabilidade propostas ao longo da história. Por esse motivo, não se pretende aqui dar um tratamento exaustivo ao tema. Para fins de completeza didático-expositiva, entretanto, um breve resumo sobre o mesmo será apresentado. O leitor interessado encontrará, com certeza, um amplo material para consultas e esclarecimentos nos textos de Wesley Salmon (1967), David Hugh Mellor (1971), Henry E. Kyburg, Jr. e Choh Man Teng (2003); Donald Gillies (2006); Jon Williamson (2009) e Maria Carla Galavotti (2009).

3.1. Interpretações objetivas do conceito de probabilidade

Três interpretações do conceito de probabilidade dominam, como diria John Venn, a literatura nessa "província": a "clássica", a "frequentista" e a "lógica". Segundo a "interpretação clássica", normalmente atribuída a Laplace (1825) e presente na origem do cálculo de "chances" em "jogos de sorte ou azar" em Cardano (1663), Huygens (1657) e na correspondência entre Pascal e Fermat, em torno de 1654 (DEVLIN, 2010), probabilidades são atribuídas a eventos proporcionalmente ao número de resultados que determinam sua ocorrência, entre casos "igualmente possíveis". Assim, se os elementos de um conjunto não vazio e finito Ω representam a totalidade de "casos igualmente possíveis" e um evento E ocorre se e somente se os resultados que determinam sua ocorrência constituem um subconjunto $\Omega(E) \subset \Omega$, a probabilidade de E, segundo a interpretação clássica, é definida pela razão $P(E) = |\Omega(E)|/|\Omega|$, em que $|A|$ representa o número de elementos de $A \subset \Omega$.

Embora a definição de probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis o número total de casos igualmente possíveis, tenha um grande significado no desenvolvimento da teoria da probabilidade, diversas dificuldades comprometem sua admissibilidade, aplicabilidade e atestabilidade. Segundo Wesley Salmon:

> The immediate difficulty with this interpretation is that "equally possible" seems to mean "equally probable", so the definition appears to be flagrantly circular. But the apparent circularity can be overcome it a definition of "equally probable" can be given which is independent of the definition of "probable" itself. The classical theorists attempted to offer such a definition by means of the *principle of indifference*. This principle states that two possibilities are equally probable if there is no reason to prefer one to the other.

> The principle of indifference, lying as it does at the very heart of the classical interpretation, has been the subject of much controversy. Various objections have been brought against it. First, it *defines* "probability" in terms of equally probable alternatives, so it presupposes a priori that every instance of probability can be analyzed in terms of equally probable cases.
>
> ...
>
> Another objection rejects any rule that pretends to transform ignorance automatically into knowledge. Knowledge of probabilities is concrete knowledge about occurrences; otherwise, it is useless for prediction and action. According to the principle of indifference, this kind of knowledge can result immediately from our ignorance of reasons to regard one occurrence as more probable than another. This is epistemological magic. Of course, there are ways of transforming ignorance into knowledge – by further investigation and the accumulation of more information. It is the same with all "magic"; to get the rabbit out of the hat you first have to put him in. The principle of indifference tries to perform "real magic" (SALMON, 1967 p.65 – 66).

A objeção mais contundente ao "princípio da indiferença" ou "princípio da razão insuficiente" (LAPLACE, 1825), segundo Salmon (1967), deve-se às contradições lógicas explicitas que o princípio suscita, como exemplifica nas páginas 66 – 68.

A partir de meados do século 19, Robert Leslie Ellis e John Venn (1866) desenvolveram em Cambridge uma nova interpretação objetiva do conceito de probabilidade, com base em um "princípio fundamental" de natureza empírica: "On the long run of similar trials, every possible event tends ultimately to recur in a definite ratio of frequency" (ELLIS, 1854 p.605). Convictos da validade desse princípio, Ellis (1842 e 1854) e Venn (1866), definem a probabilidade de um evento como a sua frequência em uma sequencia ilimitada de ensaios. Nas palavras de Venn:

> We are now in a position to give a tolerably accurate definition of a phrase which we have frequently been obliged to employ, or incidentally to suggest, and of which the reader may have looked for a definition already, viz. the probability of an event, or what is equivalent to this, the chance of any given event happening. I consider that these terms presuppose a series ; within the indefinitely numerous class which composes this series a smaller class is distinguished by the presence or absence of some attribute or attributes, as was fully illustrated and explained in a previous chapter. These larger and smaller classes respectively are commonly spoken of as instances of the 'event' and of 'its happening in a given particular way'. Adopting this phraseology, which with proper explanations is suitable enough, we may define the probability or chance (the terms are here regarded as synonymous) of the event happening in that particular way as the numerical fraction which represents the proportion between the two different classes in the long run.
>
> …
>
> A word or two of explanation may be added about the expression employed above, 'the proportion in the long run'. The run must be supposed to be very long indeed, in fact never to stop. As we keep on taking more terms of the series we shall find the proportion still fluctuating a little, but its fluctuations will grow less. The proportion, in fact, will gradually approach towards some fixed numerical value, what mathematicians term its limit. (VENN 1866, p. 162 – 164)

Essa interpretação, conhecida como "fequentista", ganhou adeptos importantes ligados ao Circulo de Viena, particularmente de Hans Reichenbach e Richard Von Mises, que a ela dedicaram grande atenção.

Richard Von Mises, publicou seus primeiros artigos sobre o tema em 1919. Sua obra mais importante e conhecida sobre o assunto, *Probability, Statistics and Truth*, entretanto, foi publicada em 1928. A teoria de Von Mises tem como base a noção primitiva de "*Kollectiv*", uma estrutura especial para representar resultados de ensaios de um processo aleatório, repetidos *ad infinitum*, e um conjunto de axiomas dos quais sua teoria frequentista da probabilidade decorre. Esses axiomas, conhecidos como os axiomas da "*convergência*" e da "*aleatoriedade*", assim como a própria noção de "*Kollectiv*", entretanto, foram alvo de intensas críticas, descritas em detalhe por Salmon (1967) e Gillies (2006). Salmon, em particular, faz uma análise detalhada sobre a "admissibilidade", "aplicabilidade" e "atestabilidade" da interpretação frequentista de Von Mises, que se apoia principalmente na convicção de que a "frequência relativa", $F_n(A)$, com que um atributo, A, de um "*Kollectiv*" é observado em n ensaios repetidos de um processo aleatório, isto é, a razão entre o número de vezes que A é observado em n ensaios repetidos de um processo aleatório e n, "converge". Quanto à admissibilidade e à aplicabilidade, Salmon é tolerante:

> Assuming that the concept of the limit can be tolerated, it is rather easy to show that the frequency interpretation satisfy the criterion of *admissibility*. Furthermore, there is at least one fundamental and important sense in which the frequency interpretation satisfies the criterion of *applicability*. A statement about the probability of a particular type of event is a statement is an objective statement about the frequency with which events of that type will occur. Such statements are synthetic, and they have predictive content by virtue of applying to future events. (SALMON, 1967 p.84)

Quanto à assegurabilidade, entretanto, Salmon é implacável:

> First, however, we should turn our attention to the problem of ascertainability, for this is the crucial problem facing the frequency theory.
>
> When a sequence is generated by a known mathematical rule, we can, as already noticed, deduce statements about limits. We are not dealing with such cases. When a sequence is generated by a physical process that is well understood in terms of accepted physical theory, we may be able to make theoretical inferences concerning convergence properties. For instance, our present knowledge of mechanics enables us to infer the frequency behavior of many kinds of gambling machanisms. Our theory of probability must allow room for inferences of this kind. The basic problem, however, concerns sequences of events for which we are lacking such physical knowledge. We are dealing with the problem of induction, so we must not assume large parts of inductive science. Instead, we shall consider the question of what inferences, if any, concerning the limit of the relative frequency in a sequence can be made solely on the basis of observations on the initial portions of such sequences. … . All we can properly conclude is that the problem we are facing is an inductive problem, not a deductive problem, so it cannot have a deductive answer. We are dealing with ampliative inference; the inference from an observed relative frequency to the limit of the relative frequency is certainly of this kind.
>
> The situation is, actually, even worse. There is no guarantee that the relative frequencies converge to a limit at all. … . This fact should remind us once again of Hume's problem of induction. … .
>
> Hans Reichenbach, a leading proponent of the frequency interpretation, was well aware of these difficulties, and he appreciated the force of Hume's arguments as applied to the problem of inferring limits of relative frequencies.
> (SALMON, 1967 p.84 – 85)

Na segunda metade do século 20, Karl Popper, convenceu-se de que a interpretação frequentista de Ellis, Venn, Reichenbach e Von Mises neccesitava reparos que corrigissem o que segundo ele constituía seu principal defeito: a inadequação no caso de eventos relacionados com processos aleatórios não-repetíveis ("*single events*"). Para corrigi-los, Popper formulou e desenvolveu, em uma série de trabalhos publicados a partir de 1957, uma teoria da probabilidade fundada em uma nova interpretação objetiva desse conceito: a interpretação "propensional". De maneira resumida, Henry E. Kyburg Jr e Choh Man Teng assim descrevem a concepção de Popper:

… whereas the frequency view takes probability to belong collectively to the sequence that constitutes the reference class or the collective, the propensity approach takes probability to belong distributively to the individual trials in that class. (KYBURG, Jr e TENG, 2003 p.78)

Assim, enquanto um frequentista atribui probabilidade $p \in [0,1]$ a um evento E por estar convencido de que p é o “limite” das frequências relativas com que E ocorre nas n primeiras posições de uma hipotética sequencia infinita de ensaios repetidos ($n \to \infty$), Popper o faz por estar convencido de que há uma “propensão” intrínseca ao ensaio em “distribuir” as ocorrências de E em uma sequência infinita de ensaios repetidos de tal maneira que as frequências relativas com que E irá ocorrer nas n primeiras posições convergirá (com certeza) para p.

Donald Gillies (2006), entretanto, chama a atenção para o fato de que Karl Popper, não deixa claro se em sua concepção essa distribuição ocorre de fato em uma sequência infinita ou em uma sequência “longa”, mas finita. Segundo Gillies, enquanto na passagem:

From the point of view of the frequency interpretation, the probability of an *event of a certain kind* – such as obtaining a six with a particular die – can be *nothing but* the relative frequency of this kind of event in an extremely long (perhaps infinite) sequence of events. (POPPER, 1959, p. 29, Apud GILLIES, 2006 p.116)

Popper é ambíguo, em:

... since the probabilities turn out to depend upon the experimental arrangement, they may be looked upon as properties of this arrangement. They characterize the disposition, or the propensity, of the experimental arrangement to give rise to certain characteristic frequencies when the experiment is often repeated. (POPPER, 1957, p. 67, Apud GILLIES, 2006 p.116)

Popper parece favorecer o caso “longo”, mas finito, através de uma alusão ao uso da expressão “*often repeated*”. Essa questão, entretanto, é pouco relevante quando se discutem a admissibilidade, a aplicabilidade e a asegurabilidade da concepção Popperiana, que compartilha os mesmos problemas que enfraquecem a interpretação frequentista. De qualquer forma, ela atraiu o interesse de vários outros filósofos, Donald Gillies inclusive, que a desenvolveram em outras direções (GILLIES, 2006).

Numa outra vertente, a probabilidade de um evento E é interpretada como medida do “grau de convencimento” de um indivíduo, acerca da ocorrência desse evento, racionalmente justificável pelo seu conhecimento acerca de E. Essa interpretação surgiu em Cambridge nos primeiros anos do século 20 e foi desenvolvida por Sir John Maynard Keynes, que publicou suas idéias em 1921 (KEYNES, 1921). Segundo Gillies (2006), o raciocínio de Keynes fundamentava-se na seguinte observação:

In the case of deductive logic a conclusion is entailed by the premises, and it is certain given those premises. Thus, if our premises are that all ravens are black and George is a raven, it follows with certainty that George is black. But now let us consider an inductive, rather than deductive, case. Suppose our premises are the evidence (e say) that several thousand ravens have been observed, and that they were all black. Suppose further that we are considering the hypothesis (h say) that all ravens are black, or the prediction (d say) that the next observed raven will be black. Hume argued, and this is in agreement with modern logic, that neither h nor d follow logically from e. Yet even though e does not entail either h or d, could we not say that e *partially entails* h and d, since e surely gives some support for these conclusions? This line of thought suggests that there might be a logical theory of partial entailment which generalizes the ordinary theory of full entailment

> which is found in deductive logic. This is the starting point of Keynes's approach to probability. (GILLIES, 2006 p.29 – 30)

Conhecida como "lógica", essa interpretação do conceito de probabilidade é frequentemente descrita como uma medida do "grau de crença racional de um indivíduo" em face de seu conhecimento:

> A logical interpretation of probability takes probability to measure something like the degree of validity of an argument. From "the coin is tossed" we may infer, with cogency measured by 1/2 , that the coin lands heads. Rational belief is the degree to which one ought to believe a statement. Probability is to be *legislative* for rational belief. Knowing what I know, the validity of the argument from what I know to "the die lands one up" is 1/6. That is the degree to which I ought rationally to believe "the die lands one up". (KYBURG, Jr e TENG, 2003 p.80)

Wesley Salmon (1967) esclarece, entretanto, que esta forma de verbalização, entretanto, não deve precipitar o seu julgamento como "subjetivista":

> Although often formulated in terms of the psychological concept of belief, there is nothing at all subjective about this interpretation. Probability is regarded as an objective logical relation between statements that formulate evidence and other statements – hypotheses – whose truth or falsity is not fully determined by the evidence.
>
> According to the logical theory, there is a fundamental analogy between inductive and deductive logic. Deductive logic embodies a concept of logical entailment between premises and conclusion. A conclusion that is logically entailed by true premises cannot be false. Inductive logic requires a logical concept of probability, also known as "degree of confirmation", relating evidence to hypothesis, for the hypothesis could be false even when the statements of evidence are true. But there is a relation of partial entailment, and this is what probability measures. (SALMON, 1967, p.68 – 69)

A interpretação lógica do conceito de probabilidade concebida por Keynes, proposta com a intenção de propiciar uma estrutura lógica para a inferência em condições de incerteza e detalhadamente exposta por Donald Gillies (GILLIES, 2006), entretanto, trazia em seu bojo dificuldades que comprometeriam sua assegurabilidade. Segundo Henry Kyburg Jr e Choh Man Teng (2003):

> Keynes's view has been unjustly neglected until recently. An important feature of his view, but one that makes his probabilities hard to compute with, is the claim that probabilities are only partially ordered: two probabilities may be incomparable. The first may be neither greater, nor less than, nor yet equal to the third. This theory of "imprecise probabilities" has only recently attracted significant attention. Keynes himself had little to offer by way of a systematization of his logical probabilities, and this may be one of the reasons for the neglect of his work. (KYBURG Jr. e TENG, 2003 p. 80 – 81)

A concepção Keynesiana, atraiu também o interesse de filósofos ligados ao Círculo de Viena, entre os quais se destaca Rudolf Carnap:

> The most widely known approach along logical lines is that of Rudolf Carnap [Carnap, 1950], whose theory of probability is directed toward constructing a formal inductive logic in the same spirit in which we have a formal deductive logic. Probability is taken to be a logic of rational belief in the sense that, given our total body of evidence, the degree of partial belief in a given statement that is *rationally justified* by that evidence is to be determined on logical grounds alone. Probability is to be legislative for rational degrees of belief.

> Carnap assumes a logical language in which both deductive and inductive relations can be expressed. In deductive logic, if a statement *e* entails another statement *h*, then if *e* is true, *h* must be true. In the same vein, if *e* is evidence for a hypothesis *h*, then the relation we see between the evidence *e* and the hypothesis *h* is what Carnap calls a relation of partial entailment. Carnap views this relation of partial entailment between the evidence *e* and hypothesis *h* as a logical or necessary relation. In this he is following Keynes, whose book defended the same idea. (KYBURG Jr. e TENG, 2003 p.81)

Como ressalta Alan Hajék (2009),

> Logical theories of probability retain the classical interpretation's idea that probabilities can be determined a priori by an examination of the space of possibilities. However, they generalize it in two important ways: the possibilities may be assigned *unequal* weights, and probabilities can be computed whatever the evidence may be, symmetrically balanced or not. Indeed, the logical interpretation, in its various guises, seeks to encapsulate in full generality the degree of support or confirmation that a piece of evidence *E* confers upon a given hypothesis *H*, which we may write as *c*(*H*, *E*). In doing so, it can be regarded also as generalizing deductive logic and its notion of implication, to a complete theory of inference equipped with the notion of 'degree of implication' that relates *E* to *H*. It is often called the theory of 'inductive logic', although this is a misnomer: there is no requirement that *E* be in any sense 'inductive' evidence for *H*. (HAJÉK, 2009 seção 3.2)

A abordagem desenvolvida por Carnap, entretanto, é, de longe, o mais completo estudo sistemático da teoria lógica da probabilidade. Sua interpretação satisfaz ainda os critérios de "admissibilidade", e de "atestabilidade", desde que a linguagem lógica seja suficientemente rica. Sua aplicabilidade, entretanto, é comprometida pela dependência com que proposições de evidência ou hipóteses são expressas em termos dessa linguagem. Maiores detalhes encontram-se, por exemplo, em Salmon (1967), Kyburg Jr. e Teng (2003) e Hajék (2009).

3.2. Interpretações subjetivas do conceito de probabilidade

A interpretação lógica (objetiva) do conceito de probabilidade, como medida do grau de crença racional de um indivíduo na ocorrência de um evento, em face de um determinado corpo de evidência, admite uma variante não objetiva quando se vincula o grau de crença desse indivíduo diretamente à sua disposição de agir em algum sentido específico. Essa visão está na origem da interpretação subjetiva moderna do conceito de probabilidade, sugerida simultânea e independentemente por Frank P. Ramsey (1926) e Bruno De Finetti (1937), em que o grau de crença racional de um indivíduo na ocorrência de um evento é expresso por sua disposição em apostar na sua ocorrência:

> Supposons qu'un individu soit obligé d'évaluer le prix *p* pour lequel il serait disposé d'échanger la possession d'une somme quelconque *S* (positive ou négative) subordonée à l'arrivée d'un événement donné, *E*, avec la possession de la somme *pS*; nous dirons par définition que ce nombre *p* est la mesure du degré de probabilité attribué par l'individu considéré à l'événement *E*, ou, plus simplement, que *p* est la probabilité de *E* (selon l'individu considéré; cette précision pourra d'ailleurs être sous-entendue s'il n'y a pas d'ambigüıté). (DeFINETTI, 1937 p.6)

Segundo De Finetti, portanto, se, diante de um determinado corpo de evidência, um indivíduo se dispõe a apostar *pS* na ocorrência de um evento *E*, ganhando com isso um prêmio de valor *S* (positivo ou negativo), então *p* é, para esse indivíduo, o grau de crença na ocorrência de *E* ou, simplesmente, a probabilidade de *E*. Obviamente, esse indivíduo corre, automaticamente, o risco de perder pS se *E* não ocorrer.

Enquanto em De Finetti as apostas são monetizadas, isto é, o grau de crença de um indivíduo na ocorrência de um evento é de fato o preço (em reais, por exemplo) que ele está disposto a pagar por um bilhete de loteria que lhe dará 1 real de prêmio se o evento ocorrer e nada caso contrário, Ramsey (1926), e mais tarde Leonard J. Savage (1954), atrelam suas definições de graus de crença individuais a loterias em que os prêmios são expressos em utilidades (um conceito individualizado por relações de preferência). Ramsey e Savage procuram, assim, evitar problemas relacionados com utilidade marginal do dinheiro, que pode variar em função da unidade monetária e do poder econômico individual.

De qualquer forma, logicistas e subjetivistas como De Finetti, Ramsey e Savage consideram probabilidade um conceito de natureza epistêmica, divergindo, entretanto, quando se questiona até que ponto valorações de probabilidade são determinadas, de maneira única, por um dado corpo de evidência. Na visão subjetivista, indivíduos diferentes podem atribuir valores distintos à probabilidade de um evento, mesmo diante de um corpo de evidência comum. Essa possibilidade, admitida por Emile Borel em 1924, faz com que alguns autores atribuam a ele um certo pioneirismo subjetivista:

> While agreeing with Keynes in taking probability in its epistemic sense, Borel claims that probability acquires a different meaning depending on the context in which it occurs. Probability has a different value in situations characterized by a different state of information, and is endowed with a “more objective” meaning in science, where its assessment is grounded on a strong body of information, shared by the scientific community.
>
> Borel is definitely a subjectivist when he admits that two people, given the same information, can come up with different probability evaluations.
>
> …
>
> Borel’s conception of epistemic probability has a strong affinity with the subject tive interpretation developed by Ramsey and de Finetti. In a brief note on Borel’s work, de Finetti praises Borel for holding that probability must be referred to the single case, and that this kind of probability is always measurable sufficiently well by means of the betting method. At the same time, de Finetti strongly disagrees with the eclectic attitude taken by Borel, more particularly with his admission of an objective meaning of probability, in addition to the subjective. (GALAVOTTI, 2009 p.179)

A interpretação comportamental de probabilidade, defendida por De Finetti, Ramsey e Savage, tem ainda um forte vínculo com medidas de probabilidade aditivas. Especificamente, a condição necessária e suficiente para que um indivíduo não esteja vulnerável a um “Dutch Book” é que seus graus de crença sejam medidas de probabilidade aditivas. Por “Dutch Book” entende-se um sistema de apostas em que um indivíduo tem prejuízo independentemente do que ocorrer. Imagine, por exemplo, que um indivíduo tenha graus de crença iguais a: 5/6, na ocorrência de um evento E; 5/6, na ocorrência de um evento F; *1*/36, na não ocorrência de “$E \vee F$” (E ou F); e 1/3 na não ocorrência de “$E \wedge F$” (E e F). Se S = 36, apostar, simultaneamente: 30 = 5S/6, na ocorrência de E; 30 = 5S/6, na ocorrência de F; 1 = S/36, na não ocorrência de “$E \vee F$” (E ou F); e 12 = S/3 na não ocorrência de “$E \wedge F$” (E e F), constitui para esse indivíduo um “Dutch Book” pois ele perderá 1, independentemente do que ocorra (ver tabela abaixo):

***E* ocorre**	***F* ocorre**	**Prêmio Coletado**	**Lucro**
Sim	sim	72	73–72 = –1
Sim	não	72	73–72 = –1
Não	sim	72	73–72 = –1
Não	não	72	73–72 = –1

A condição necessária e suficiente mencionada acima é conhecida como o teorema de Ramsey-DeFinetti ou teorema “Dutch Book”, precisamente: dados

- uma algebra finita de eventos, Σ, isto é, uma família finita de proposições acerca do resultado de um processo aleatório, fechada por negação e disjunções finitas; e
- $c:\Sigma\rightarrow[0,1]$ a função que define os graus de crença, no sentido de Ramsey e DeFinetti, de um indivíduo na ocorrência de cada um dos eventos em Σ.

A condição necessária e suficiente para que esse indivíduo não esteja sujeito a um "Dutch Book" (prejuízo certo) é que $c:\Sigma\rightarrow[0,1]$ seja uma medida de probabilidade aditiva.

No exemplo acima, observe que os graus de crença estabelecidos não são compatíveis com uma medida de probabilidade aditiva, pois

$$1/3 = c(\neg(E\wedge F)) = c((\neg E)\vee(\neg F)) \neq (1 - c(E)) + (1 - c(F)) - c(\neg(E\vee F)) = 11/36.$$

Na visão subjetivista de De Finetti, Ramsey e Savage, portanto, não existe prevalência dos graus de crença de um indivíduo sobre outro. A única restrição imposta é a de "coerência", ditada pela aderência de c às condições que definem uma medida de probabilidade aditiva, o que torna automaticamente admissível essa interpretação do conceito de probabilidade. A tolerância com posições não concordantes pode ser vista ainda como uma virtude dessa interpretação. Cabe ressaltar, entretanto, que um resultado devido a Abner Shimony (1955) estende o teorema de Ramsey-DeFinetti e dá suporte, segundo alguns autores, á σ-aditividade de uma probabilidade, como propôs Kolmogorov. Especificamente, se a família de eventos, Σ, é fechada por negação e disjunções enumeráveis, isto é, uma σ-álgebra de eventos, um indivíduo está protegido contra a certeza de nenhum lucro, combinada com a possibilidade de prejuízo se e somente se sua função de crença, $c:\Sigma\rightarrow[0,1]$, for uma medida de probabilidade σ-aditiva.

A importância da visão subjetivista de DeFinetti, Ramsey e Savage, entretanto, não se encerra na forma de definir o que se entende por grau de crença individual. Segundo Kyburg Jr. e Tong (2003):

> As a static theory of idealized degrees of belief, it could be psychologically interesting (though easy to falsify, if construed literally), but would be of little interest to logicians, epistemologists, and statisticians, not to mention philosophers of science and computer scientists. It would certainly cast little light on the issues of inductive inference. (KYBURG Jr. e TONG, 2003 p.89)

Essa teoria ganha força com a utilização do condicionamento como princípio (também coerente, cf. KYBURG Jr. e TONG, 2003 p.89 teorema 4.3) de recalibração dos graus de crença de um indivíduo em face de um novo corpo de evidência e a introdução do conceito de permutabilidade (*exchangeability*). Para Galavotti (2009),

> With the Italian Bruno de Finetti (1906-1985) the subjective interpretation of probability came to completion. Working in the same years as Ramsey, but independently, de Finetti forged a similar view of probability as degree of belief, subject to the only constraint of coherence. To such a definition he added the notion of exchangeability, which can be regarded as the decisive step towards the edification of modern subjectivism. In fact exchangeability, combined with Bayes' rule, gives rise to the inferential methodology which is at the root of the so-called neo-Bayesianism. This result was the object of the paper "Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio" that de Finetti read at the International Congress of Mathematicians, held in Bologna in 1928. In 1935, at Maurice Fréchet's invitation de Finetti gave a series of lectures at the Institut Henri Poincaré in Paris, whose text was published in 1937 under the title "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives". This article, which is one of de Finetti's best known, allowed dissemination of his ideas in the French speaking community of probabilists. However, de Finetti's work came to be known to the English speaking community only in the 1950s, thanks to Leonard Jimmie Savage, with whom he

entertained a fruitful collaboration. In addition to making a contribution to probability theory and statistics which is universally recognized as seminal, de Finetti put forward an original philosophy of probability, which can be described as a blend of pragmatism, operationalism and what we would today call "anti-realism". (GALAVOTTI, 2009 p.189)

A partir do conceito de permutabilidade, De Finetti deu ainda um passo decisivo na redução do objetivismo ao subjetivismo, com um resultado que se tornou conhecido como o "teorema da representação". De maneira resumida, se *E* é um evento e, em *n* ensaios repetidos do processo aleatório subjacente, representarmos por $E(j,1)$ o evento descrito pela proposição "*E* ocorre no ensaio *j*", $1 \leq j \leq n$, e por $E(j,0)$ a sua negação, diz-se que as ocorrências de *E* são permutáveis em relação à uma função de crença *c*, se para todo inteiro *n*:

- $c(E(i,1)) = c(E(j,1))$ para quaisquer $1 \leq i , j \leq n$; e
- $c(E(1,x_1)\wedge E(2,x_2)\wedge\ldots\wedge E(n,x_n)) = c(E(1,y_1)\wedge E(2,y_2)\wedge\ldots\wedge E(n,y_n))$ para quaisquer $x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n$ em{0,1} tais que $\sum_i xi = \sum_j yj$.

A condição necessária e suficiente para que as ocorrências de *E* sejam permutáveis em relação à uma função de crença *c* é que exista uma única função de distribuição *F* em [0,1] tal que para todo inteiro *n*,

$$c(E(1,x_1)\wedge E(2,x_2)\wedge\ldots\wedge E(n,x_n)) = \int_{[0,1]}p^k(1-p)^{n-k}F(\mathrm{d}p),$$

em que $k = \sum_i xi$. Em outra palavras, a probabilidade subjetiva $c(E(1,x_1)\wedge E(2,x_2)\wedge\ldots\wedge E(n,x_n))$ é uma mistura (única) das probabilidades objetivas, $p^k(1-p)^{n-k}$, de ocorrerem *k* sucessos em uma sequencia de ensaios independentes em que a probabilidade objetiva (desconhecida) de *E* é igual a *p*. Uma extensão desse teorema deve-se a Edwin Hewitt e Leonard J. Savage (1955)

Galavotti (2009) destaca ainda o sentido pragmático do "teorema da representação" e o seu significado frente ao problema da indução:

> From a philosophical point of view, de Finetti's reduction of objective to subjective probability is to be seen pragmatically; it follows the same pragmatic spirit inspiring the operational definition of subjective probability, and complements it. From a more general viewpoint, the representation theorem gives applicability to subjective probability, by bridging the gap between degrees of belief and observed frequencies. Taken in connection with Bayes' rule, exchangeability provides a model of how to proceed in such a way as to allow for an interplay between the information on frequencies and degrees of belief. By showing that the adoption of Bayes' method, taken in conjunction with exchangeability, leads to a convergence between degrees of belief and frequencies, de Finetti indicates how subjective probability can be applied to statistical inference.
>
> According to de Finetti, the representation theorem answers Hume's problem because it justifies "why we are also intuitively inclined to expect that frequency observed in the future will be close to frequency observed in the past" [de Finetti, 1972a, p. 34]. De Finetti's argument is pragmatic and revolves around the task of induction: to guide inductive reasoning and behavior in a coherent way. Like Hume, de Finetti thinks that it is impossible to give a logical justification of induction, and answers the problem in a psychologistic fashion. (GALAVOTTI, 2009, p.192 – 193)

Voltando a Ramsey e Savage, vale ainda destacar as seguintes observações de Robert F. Nau (2001):

> … .Ramsey sought to separate probability from utility by the device of an *ethically neutral proposition*. (He referred to money bets as the 'old-established way of measuring a person's belief,' which he regarded as 'insufficiently general' for his purposes because 'it is universally agreed that money has a diminishing marginal utility'.) Savage introduced,

instead, the notion of a *consequence*, a prize whose utility would be, by definition, the same in every state of the world.

In theories and models of choice under uncertainty developed since Savage's time, it has become conventional to adopt his notion of a consequence and to strive for a clean separation between probabilities and cardinal utilities in the representation of preferences. This approach is followed in Anscombe and Aumann's (1963) simpler 'horse lottery' axiomatization of subjective expected utility and in Karni's (1985) theory of state-dependent utility, as well as in newer non-expected-utility theories such as Schmeidler's (1989) Choquet expected utility, Gilboa and Schmeidler's (1989) maxmin expected utility, Machina and Schmeidler's (1992) probabilistically sophisticated non-expected-utility preferences, Ghirardato and Marinacci's (2002) biseparable preferences, and Grant and Karni's (2000) quantifiable beliefs, to name a few. In models of information economics and financial economics that are based on those theories, the beliefs of the actors are represented by their true subjective probabilities (or non-additive generalizations thereof), which are sometimes also assumed to be mutually consistent or empirically correct. The separation of probability and utility is also fundamental to the theory of non-cooperative games, in which the payoff functions are expressed in units of pure utility, and especially to the theory of games of incomplete information, where the players' true beliefs about exogenous states of nature are subject to the common prior assumption. On a more down-to-earth level, the separation of probability from utility is central to the 'divide and conquer' strategy of applied decision analysis: wheels for assessing probabilities and computer programs for assessing utility functions for money have been used in business schools and consulting firms since the early 1960's.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNAULD, A., e NICOLE, P.. *La Logique* ou *L'Art de Penser.* Paris:1622.

BAISE, Arnold (2011). "Objective Bayesian Probability," *Libertarian Papers* 3, 20, 1 – 4. Publicado online em www.libertarianpapers.org.

BAYES, Thomas (1763). "An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances"*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

BELLHOUSE, David (2005): "Decoding Cardano's *Liber de Ludo Aleae*". *Historia Mathematica* 32, 180 – 202.

BENNETT, Deborah J.. *Randomness*. London: Harvard University Press, 1998.

BERNOULLI, Jacob. *Ars Conjectandi. Opus Posthumum*. Basileae: Thurnisiorum, 1713.

BRITANNICA, *Guide to Statistics and Probability*, Erik Gregersen Editor. New York: Britannica Educational Publishing, 2011.

BUTLER, Joseph (1736). *The Analogy of Religion, New Edition*. London: Henry G. Bohn, 1852.

CARDANO, Girolamo. *Omnia Opera. Hieronymus Cardanus: Faksimile-Neudruck der Ausgabe Lyon 1663 mit einer Einleitung von August Buck*. Stuttgart/Bad Cannstatt: Friedrich Frommann Verlag, 1966.

CARDANO, Girolamo. *The Book on Games of Chance*. Tradução de Sydney H. Gould, em Ore, Oystein. *Cardano, the gambling scholar.* Princeton: Princeton University Press, 1953.

DAVID, F. N. (1955). “Dicing and gaming: a note on the history of probability”. *Biometrika*, 42, 1–15.

DAVID, Florence Nightingale. *Games, gods and gambling.* London: Griffin, 1962.

DE FINETTI, Bruno (1937): “La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives.” *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, 7, 1 – 68; traduzido como “Foresight. Its Logical Laws, Its Subjective Sources”, em *Studies in Subjective Probability 2nd edition*, H. E. Kyburg, Jr. and H. E. Smokler (editors), 53 – 118. New York: Robert E. Krieger Publishing Co., 1980.

DE FINETTI, Bruno. *Theory of Probability, Volume 1*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1974.

DeMOIVRE, Abraham. *Doctrine of Chances. A Method of Calculating the Probability of Events in Play*. London: W. P. 1718.

DEVLIN, Keith. *The Unfinished Game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century Letter That Made the World Modern.* New York: Basic Books, 2008.

DEVLIN, Keith (2010). “The Pascal-Fermat Correspondence: How Mathematics Is Really Done”. Mathematics Teacher, 103 (8), 578 – 582.

ELLIS, Robert Leslie (1842). “On the Fundations of the Theory of Probabilities”. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, *Volume VIII*, *Part I*, *I*: 1 – 6.

ELLIS, Robert Leslie (1854). “Remarks on the Fundamental Principle of the Theory of Probabilities”. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, *Volume IX*, *Part IV*, *XXVII*: 605 – 607.

GALAVOTTI, Maria Carla (2009). “The Modern Epistemic Interpretations of Probability” em *Handbook of the History of Logic. Volume 10: Inductive Logic*, Dov M. Gabbay, Paul Thagard and John Woods (editors), 153 – 203. Amsterdam: Elsevier, 2009.

GILLIES, Donald. *Philosophical Theories of Probability*. New York, NY: Taylor & Francis e-Library, 2006.

GLYMOUR, Clark e EBERHARDT, Frederick (2008). “Hans Reichenbach”. Stanford Encyclopedia of Philosophy em http://plato.stanford.edu/entries/reichenbach/#ThePro193194.

HACKING, Ian. *The Emergence of Probability*. *A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference.* New York: Oxford University Press, 1975.

HÁJEK, Alan (2009): “Interpretations of Probability”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy* em http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/#LogPro.

HALD, Anders. *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

HEWITT, Edwin e SAVAGE, Leonard J. (1955). “Symmetric measures on Cartesian products”. *Transactions of the American Mathematical Society* 80, 470 – 501.

HUYGENS, Christiaan (1657). “De Ratiociniis in Ludo Aleae”, em Francisci van Schooten Editor. *Francisci a Schooten Exercitationum Mathematicarum, Liber Primus*. Leiden: Officina Johannis Elsevirii, 1657, 521–534.

KAC, Mark (1983). “What is Random?” *American Scientist* 71, 405 – 406.

KAC, Mark (1984). “More on Randomness?” *American Scientist* 72, 282 – 283.

KADANE, Joseph B., SCHERVISH, Mark J., e Seidenfeld, Teddy. *Statistical Implications of Finitely Additive Probability.* Technical Report 206. Pittsburgh: Department of Statistics, Carnegie-Mellon University, July 1981. Publicado em Bayesian Inference and Decision Techniques. Prem K. Goel and Arnold Zellner (editors), 59 – 76. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1986.

KENDALL, Maurice George (1956). “The beginnings of a probability calculus”. *Biometrika,* 43, 1 – 14.

KEYNES, Sir John Maynard. *A Treatise on Probability*. London: Macmillan and Co., 1921.

KOLMOGOROV, Andrey. N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, Ergebnisse Der Mathematik.* Berlin: Julius Springer, 1933; traduzido como *Foundations of Probability*, New York: Chelsea Publishing Company, 1956.

KYBURG, Jr., Henry E. e TENG, Choh Man. *Uncertain Inference*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

LAPLACE, Pierre Simon, M. Le Marquis de. *Théorie Analytique des Probabilités*. Paris: Mme. Ve. Courcier 1812.

LAPLACE, Pierre Simon, M. Le Marquis de. *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Paris: Bachelier 1825; traduzido como *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York: Dover Publications Inc., English edition 1951.

MELLOR, David Hugh. *The Matter of Chance*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.

NAU, Robert F. (2001). “De Finetti Was Right: Probability Does Not Exist. *Theory and Decision* 51**,** 89–124.

POPPER, Karl R. (1957). “The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability, and the Quantum Theory”, em *Observation and Interpretation, Proceedings of the Ninth Symposium of the Colston Research Society, University of Bristol,* S. Körner (editor), 65 – 70.

RAMSEY, Frank P. (1926): “Truth and Probability.” em *Foundations of Mathematics and other Essays*, ed. R. B. Braithwaite, 156 – 198, New York: Routledge & P. Kegan Inc., 1931.

SALMON, Wesley. *The Foundations of Scientific Inference*. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh Press, 1967.

SAMBURSKY, S. (1956). “On the possible and probable in Ancient Greece”. *Osiris,* 12, 35 – 48.

SAVAGE, Leonard J.. *Foundations of Statistics.* New York: John Wiley and Sons Inc., 1954.

SEIDENFELD, Teddy and SCHERVISH, Mark J. (1983). “A conflict between finite additivity and avoiding Dutch Book”. *Phil. Sci.*, 50, 398 – 412.

SHIMONY, Abner (1955). “Coherence and the axioms of confirmation”. *Journal of Symbolic Logic*, 20:1–28.

VENN, John. *The Logic of Chance*. London and Cambridge: Macmillan and Co, 1866.

WILLIAMSON, Jon (2009). **"**Philosophies of Probability" em *Handbook of the Philosophy of Science Volume 4: Handbook of the Philosophy of Mathematics*, Andrew Irvine (editor), 493 – 533. Amsterdam: Elsevier, 2009.