



LUDWIG EDWARD BOLTZMANN
(1844 – 1906)

1

Um pioneiro da física moderna e um dos criadores da mecânica estatística

Antonio SANTORO

Universidade Presbiteriana Mackenzie.

Resumo: Alguns detalhes da infância e adolescência de Boltzmann, sua formação em Física pela Universidade de Viena, sua carreira acadêmica, polêmicas criadas com Ernst Mach e Wilhelm Ostwald, seus trabalhos marcantes como: Teorema H, Distribuição Estatística de Boltzmann que relaciona Entropia Termodinâmica e Probabilidade e Equação Teórica conhecida como Lei de Stefan-Boltzmann. Convite feito pelo Imperador Francisco José para proferir palestras no Palácio Imperial. Físicos notáveis como, Planck, Einstein Schrodinger reconheceram seus trabalhos, sendo que este último deu um testemunho emocionado sobre a linha de pensamento de Boltzmann. Em 1906, um ato insano tirou a vida desse grande Físico Teórico.

ABSTRACT: Some details of the childhood and adolescence of Boltzmann, your formation in Physics for the University of Vienna, your academic career, controversies made with Ernst Mach and Wilhelm Ostwald, your outstanding works as: Theorem H, Statistical Distribution of Boltzmann that relates Thermodynamic Entropy and Probability and Theoretical Equation known as Law of Stefan-Boltzmann. Invitation done by Emperor Francisco José to utter lectures in the Imperial Palace. Physicists notable as, Planck, Einstein Schrodinger recognized your works, and this last one gave an excited testimony on the line of thought of Boltzmann. In 1906, an insane act removed that great Theoretical Physicist's life.

Carreira acadêmica

Em 20 de Fevereiro de 1844, nascia em Viena, Áustria Ludwig Edward Boltzmann, filho de Ludwig Georg Boltzmann e de Katharina Pauernfeind. Seu pai era cobrador de impostos e lhe proporcionou uma infância tranqüila. Sua educação primária ficou a cargo de um tutor particular em sua própria casa. Sua educação secundária foi feita em Linz, Áustria. Aos 15 anos perdeu seu pai, porém, não enfrentou dificuldades porque seu avô materno lhe deixou como herança um fábrica de relógios em Berlim. Com 19 anos, em 1863, entrou para a Universidade de Viena para fazer o curso de Física e teve como professores Josef Loschmidt, Joseph Stefan, Andréas Von Ettingshausen e Jozef Petzval. Aos 22 anos, em 1866, Boltzmann defendeu o doutorado com uma tese sobre a Teoria Cinética dos Gases orientado pelo professor Stefan. Em 1867 se tornou conferencista e permaneceu por dois anos como assistente de Stefan. Em 1869, com 25 anos, foi nomeado professor de Física Teórica na Universidade de Graz, na província de Estíria, na Áustria Setentrional, depois de quatro anos nesse cargo, em 1873, aceitou a titularidade de uma das disciplinas de Matemática na Universidade de Viena onde permaneceu três anos. Em 1876, volta a Universidade de Graz, nesse mesmo ano casa com Henriette Von Aigentler com quem teve cinco filhos (três meninas e dois meninos), e permanece quatorze anos nessa Universidade, desta vez para desempenhar a cátedra de Física Experimental. Nessa época Boltzmann já era muito conhecido no mundo científico, em 1885 se tornou membro da Academia de Ciências do Império Austríaco e em 1887 se tornou Presidente da Universidade de Graz. Em 1890, aceitou o convite para a cátedra de Física Teórica na Universidade de Munique, na Baviera, Alemanha. Em 1894 volta a Universidade de Viena, desta vez na cátedra de Física Teórica que estava vaga devido a morte de Joseph Stefan. No ano seguinte, Ernst Mach foi nomeado titular da cátedra de História e Filosofia das Ciências. Boltzmann e Mach eram opositores na ciência, e tal era a antipatia entre eles que, em 1900, Boltzmann aceitou o convite para lecionar na Universidade de Leipzig, convite este feito por Wilhelm Ostwald que embora não concordando com o ponto de vista científico de Boltzmann, mantinha com ele um bom relacionamento social. Em 1901, Ernst Mach é afastado da Universidade de Viena por motivo de saúde. Em 1902, Boltzmann volta à Universidade de Viena para ocupar as cátedras de Física Teórica e de História e Filosofia das Ciências. Suas conferências sobre Filosofia ficaram tão famosas que ocasionaram um convite especial do imperador Francisco José para proferir na corte uma série de palestras com temas científicos. Boltzmann permaneceu na Universidade de Viena até 1906 por ocasião de sua morte.

Polêmicas e testemunhos

No final do século 19, muitos Físicos e Químicos de renome não aceitavam a idéia de que a matéria é descontínua e Boltzmann elaborou toda sua teoria com base no conceito de a matéria ser constituída por átomos e moléculas, também comungavam com essa idéia vários sábios da época como o escocês Maxwell e o americano Gibbs. Para se ter idéia das dificuldades imposta a Boltzmann, o editor de um proeminente jornal alemão de Física recusou um de seus trabalhos sobre átomos e moléculas por considerá-lo uma conveniente construção teórica. Entre os que criticaram os trabalhos de Boltzmann estão Mach, Ostwald, Loschmidt, Zermelo, Planck.

Na Conferência de Halle em 1891, Ostwald e Planck tentaram convencer Boltzmann da superioridade do método puramente termodinâmico sobre o atomístico, Boltzmann repentinamente disse:

"Eu não vejo razão para não considerar a energia dividida atômicamente".

Em 1897, Boltzmann sugeriu a Planck o uso de seu método estatístico para o tratamento da radiação do corpo negro. Em 1900 Planck, totalmente convertido em adepto do método atomístico, utilizou o método estatístico de Boltzmann para explicar sua lei da radiação e tornou-se um de seus maiores fãs, sendo que em 1904 escreveu:

" Clausius e Maxwell nunca tentaram dar uma definição direta da entropia em termos mecânicos. Esse passo foi dado por Boltzmann, a partir da teoria cinética dos gases, definindo a entropia de forma geral e inequívoca, como o logaritmo da probabilidade de um estado mecânico "

Em 1906, no livro Teoria da Radiação do Calor de Max Planck aparece pela primeira vez a famosa equação: $S = k \log W$ onde S é a entropia, W probabilidade de um estado mecânico e k uma constante, hoje chamada de constante de Boltzmann. Essa equação está gravada na pedra acima do busto de Boltzmann em seu túmulo no Cemitério Geral de Viena.

Nesse mesmo ano, em 5 de Setembro de 1906, quando passava férias na Baía de Duino, perto de Trieste, Boltzmann, com saúde física e mental abalada comete um ato insano, enquanto sua esposa e filha estavam na praia, ele em casa se enforcou.

Depois de sua morte, trabalhos independentes de Albert Einstein e Marian Smoluchowski sobre o movimento browniano e a verificação experimental feita por Jean Baptiste Perrin demonstraram que a matéria era constituída por moléculas.

Dentre os Físicos notáveis que reconheceram os trabalhos de Boltzmann encontra-se Erwin Schrödinger, fundador da Mecânica Ondulatória, que após ter estudado as aplicações dos métodos estatísticos de Boltzmann em profundidade emitiu uma entusiástica citação sobre a linha de pensamento de Boltzmann:

"Sua linha de pensamento pode ser chamada meu primeiro amor em ciência. Nenhuma outra jamais me encantou ou jamais o fará novamente."

Juntamente com o físico americano Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903) que trabalhou na mesma linha que ele, de forma independente, Boltzmann é considerado um dos criadores da Mecânica Estatística. Fãs e críticos do trabalho de Boltzmann concordam que ele abriu caminho para muitas aproximações usadas atualmente em Mecânica Estatística, porém, não deixou uma teoria unificada coerente. Dentre os papers colecionados em Wissenschaftliche Abhandlung podemos ver mais de 100 papers só em Mecânica Estatística.

Um dos trabalhos importantes de Boltzmann feito em 1871 é conhecido como distribuição de Maxwell-Boltzmann, na qual se verifica que a energia média de

movimento de uma molécula é igual para cada direção. Neste trabalho vemos o reconhecimento da importância da Teoria Eletromagnética de Maxwell.

CONTRIBUIÇÕES SIGNIFICATIVAS

Lei de Boltzmann e Lei de Stefan - Boltzmann

Em 1879, com base em fundamentos experimentais, Josef Stefan (1835 - 1893) fez a conjectura de que a energia total irradiada por um corpo aquecido varia com a quarta potência da temperatura absoluta. A formulação mais precisa foi dada em 1884 por Boltzmann. Devido à importância do trabalho desenvolvido por Boltzmann nessa época faremos um breve resumo histórico.

No período de 1868 a 1871, Boltzmann generalizou a lei da distribuição de Maxwell para gases poliátômicos, também levando em conta a presença de forças externas; com isto produziu o famoso *fator de Boltzmann* $\exp(-\epsilon/kT)$ onde ϵ indica a energia total da molécula. Estas investigações também levaram ao teorema da equipartição. Para obtermos a lei que introduziu o famoso fator de Boltzmann, suponhamos que exista algum tipo de força distinta da gravidade, que atue sobre as moléculas de um gás. Por exemplo, as moléculas podem estar carregadas eletricamente e podem sofrer a atuação de um campo elétrico ou de outra carga que as atraia. Ou, devido às atrações mútuas dos átomos entre si, ou pela parede ou por um sólido ou alguma outra razão, existe uma força de atração que varia com a posição e que atua sobre todas as moléculas. Suponhamos agora, para simplificar, que todas as moléculas são iguais e que a força atue sobre cada uma individualmente, de modo que a força total sobre uma porção de gás seja simplesmente o número de moléculas multiplicado pela força sobre cada uma. Para evitar complicações desnecessárias, vamos escolher um sistema de coordenadas com o eixo-x na direção da força \vec{F} . Se tomarmos planos paralelos no gás, separados por uma distância dx, a força sobre cada átomo, multiplicada por n átomos por cm^3 , multiplicada por dx, deve ser equilibrada pela variação da pressão: $Fndx = dP = kTdn$ ($P = nkT$).

Se observarmos, veremos que $-Fdx$ é o trabalho que realizamos para levar a molécula de x a $x + dx$, e se F provém de um potencial, podemos dizer que o trabalho realizado pode representar uma variação de energia potencial (EP). A diferencial negativa da variação da energia potencial é igual ao trabalho realizado Fdx , portanto:

$$Fdx = kT \frac{dn}{n} = -d \overline{EP}, \text{ portanto:}$$

$$\frac{dn}{n} = - \frac{d \overline{EP}}{kT} \quad \text{Integrando tem:}$$

$$n = (\text{constante}) e^{-EP/kT} \quad \text{(Lei de Boltzmann)}$$

Como o equilíbrio térmico não pode existir se as forças externas não forem conservativas, podemos generalizar o caso particular usado para a dedução da Lei de Boltzmann. Boltzmann mostrou além disso que a lei de distribuição proposta é exatamente a distribuição original de Maxwell, por isso é conhecida hoje como distribuição de Maxwell-Boltzmann. Em 1872 chegou ao

famoso Teorema-H que proporcionou uma base molecular para a tendência natural de abordar sistemas físicos, e permanecer neles um estado de equilíbrio. Deste modo estabeleceu uma ligação entre o caminho microscópico (o que caracteriza a mecânica estatística) e o caminho fenomenológico (o que caracteriza a termodinâmica) com uma transparência como nunca antes foi encontrada; também proporcionou um método direto para calcular a entropia de um dado sistema físico do ponto de vista microscópico. Como um corolário do Teorema-H, Boltzmann mostrou que a distribuição de Maxwell-Boltzmann é a única distribuição que permanece invariável, sob a influência de colisões moleculares. Em 1876 Boltzmann deduziu sua famosa equação de transporte que, em 1916 Chapman e Enskog, provaram ser uma ferramenta extremamente poderosa para investigar propriedades macroscópicas de sistemas em estado de não-equilíbrio. Isto porém veio trazer conseqüências desagradáveis para Boltzmann. Seu Teorema-H e o conseqüente caráter irreversível de seu sistema físico foram os responsáveis por severas críticas, principalmente de Loschmit (1876) e Zermelo (1896). Enquanto Loschmit estava preocupado com as conseqüências deste teorema poder ser ajustado com o caráter reversível das equações básicas do movimento das moléculas, Zermelo estava preocupado em como suas conseqüências poderiam ser ajustadas com o comportamento de sistemas *quase periódicos* que aparecem devido aos chamados ciclos de Poincaré. Boltzmann se defendeu contra esses ataques com todas as forças, mas não pode convencer seus oponentes da precisão de seu trabalho. Ao mesmo tempo, energistas conduzidos por Mach e Ostwald, criticaram muito a base (molecular) da teoria cinética.

O estudo da densidade de energia total em um campo de radiação é conhecido como Lei de Stefan-Boltzmann e pode ser enunciada como uma relação entre a densidade de energia total em um campo de radiação e a temperatura T do corpo emissor (T suposta igual para todos os pontos do corpo emissor).

Quando Maxwell estudou a teoria do campo eletromagnético, concluiu que as ondas eletromagnéticas tinham, entre suas propriedades, a de possuírem quantidade de movimento. Como na troca de energia entre o campo de radiação e os corpos, essa quantidade de movimento varia, essa variação corresponde a uma força aplicada pelo corpo ao campo de radiação, de modo totalmente análogo ao que acontece com as moléculas de um gás contidas em um recipiente. Então, a reação da radiação corresponde a uma força que atua sobre as paredes do corpo. A pressão exercida sobre os corpos desse modo já foi medida

experimentalmente e seu valor é $\frac{1}{3}\mu$. Aplicando o primeiro e segundo

Princípios da Termodinâmica:

$$dQ = dU + PdV \quad \text{e} \quad dS = dQ/T$$

$$\text{Temos: } TdS = dU + PdV \quad ; \text{ sendo } U = \square V \quad \text{e} \quad P = \frac{1}{3}\mu$$

Substituindo temos:

$$TdS = Vd\square + \square dV + \frac{1}{3}\mu dV \quad ; \text{ portanto,}$$

$$dS = \frac{V}{T}d\mu + \frac{4\mu}{3T}dV$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo do segundo membro por dT, temos:

$$dS = \frac{V}{T} \frac{d\mu}{dT} dT + \frac{4\mu}{3T} dV \quad (1)$$

A diferencial total da função S é dada por:

$$dS = \left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_V dT + \left[\frac{\partial S}{\partial V} \right]_T dV \quad (2)$$

Quando comparamos as equações (1) e (2) temos:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_V = \frac{V}{T} \frac{d\mu}{dT} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial S}{\partial V} \right]_T = \frac{4\mu}{3T}$$

Derivando essas equações, a primeira em relação a V e a segunda em relação a T, temos:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{4}{3T} \frac{d\mu}{dT} - \frac{4\mu}{3T^2}$$

Sendo: $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$, temos:

$$\frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} = \frac{4}{3T} \frac{d\mu}{dT} - \frac{4\mu}{3T^2}$$

Separando as variáveis e integrando, temos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = 4 \int \frac{dT}{T} + C$$

$$\ln \mu = 4 \ln T + \ln a \quad \ln a = C$$

Portanto, $\mu = aT^4$ (3) **Lei de Stefan-Boltzmann**

Comparando com a equação $\square = 4 \cdot R_T / c$ temos:

$$\frac{4R_T}{c} = aT^4 \quad \text{Donde} \quad R_T = \frac{ac}{4} T^4$$

$$\frac{ac}{4} = \sigma \quad (\text{constante de Stefan}) \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Portanto: $R_T = \sigma.T^4$ ou $R_T = e.\sigma.T^4$ (4)

onde R_T é o poder de emissão total emitida por segundo em todas as frequências, através de 1 m^2 de uma superfície à temperatura absoluta T ; e é uma constante com valores de 0 a 1, e recebe o nome de poder de emissão total e depende da superfície emissora.

É de interesse da Física o estudo da radiação absorvida por uma superfície. Essa propriedade é medida por uma constante α que recebe o nome de poder de absorção, e é definida como o quociente da energia da radiação térmica total absorvida pela superfície, pela energia térmica total que incide sobre ela. Foi verificado experimentalmente que corpos em equilíbrio térmico apresentam $e = \alpha$ (identidade de Kirchhoff).

Histórico sobre o teorema de Boltzmann

No fim do século passado, depois da unificação da Alemanha (1871) e em plena revolução industrial na Europa (1870 - 1914), a Alemanha liderou o desenvolvimento de novas atividades econômicas, como a indústria química e a produção de energia elétrica, além das já existentes, como a carbonífera, siderúrgica e têxtil.

Durante séculos os produtos químicos foram extraídos de substâncias naturais, como os fosfatos e os nitratos.

Os fosfatos, nitratos e nitrogênio sintético transformaram-se em matéria prima para produção de explosivos e fertilizantes. Houve uma corrida para as fontes de nitratos e fosfatos. Na África, mais precisamente no Congo havia fonte de nitrato, mais os ingleses eram os colonizadores, então os alemães se voltaram para o Chile onde a fonte de fosfato era o depósito de excremento de aves (o guano) e para manter uma rota em caso de guerra plantaram colônias alemãs no sul do Brasil, na Argentina e no Chile. Os ingleses para se precaverem retomaram as Ilhas Malvinas que estava esquecida no sul da América do Sul e colonizada por argentinos. A única saída dos alemães foi introduzir nas Universidades a disciplina de Química Teórica com o fim de estudar a síntese de materiais.

Nesse contexto nasce o Teorema H e a famosa equação de transporte de Boltzmann.

Vamos assumir um gás suficientemente rarefeito tal que somente colisões binárias devem ser levadas em conta. Os efeitos de forças externas nas colisões são ignorados, assumindo que estas forças, se existirem, teriam pequena ação sobre o potencial intermolecular.

$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col.}$ onde f = função distribuição.

Nós definimos a função distribuição de equilíbrio como a solução da equação de Transporte de Boltzmann, a qual é independente do tempo. Poderemos ver que, além disso, o limite da função distribuição com o tempo tende a infinito. É assumido que não existem forças externas. Isto consiste em assumir que a função

distribuição é independente da posição de \vec{r} , portanto podemos descrevê-la por $f(\vec{p}, t)$.

A função distribuição no equilíbrio é descrita por $f_0(p)$ é a solução da equação $\frac{\partial f(\vec{p}, t)}{\partial t} = 0$. A função H de Boltzmann é dada por:

$$H(t) = \int d^3v. f(\vec{p}, t) \log f(\vec{p}, t) \quad (6)$$

Derivando a última equação em relação ao tempo, temos:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int d^3v. \frac{\partial f(\vec{p}, t)}{\partial t} \left[1 + \log f(\vec{p}, t) \right] \quad (7)$$

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ implica $\frac{dH}{dt} = 0$ (condição necessária)

Teorema H de Boltzmann

Se f satisfaz a equação de Transporte de Boltzmann. então:

$$\frac{dH(t)}{dt} \leq 0 \quad (8)$$

Para uma dada função distribuição $f(\vec{p}, t)$, H é definida como

$$H = \int d^3p. f(\vec{p}, t) \log f(\vec{p}, t) \quad (9)$$

A evolução no tempo da função H é determinada pela evolução no tempo da função $f(\vec{p}, t)$, o que de um modo geral não satisfaz a equação de Transporte de Boltzmann. Satisfaz a equação de Transporte de Boltzmann somente no instante quando assumimos que acontece o caos molecular.

(Conceito moderno de caos é: forma de estudar sistemas aparentemente desordenados, ou seja, sistemas com muitos graus de liberdade)

O teorema H afirma que se a um dado instante t o estado do gás satisfaz a hipótese do caos molecular, então no instante $t + \Delta t$ ($\Delta t \rightarrow 0$):

a) $dH/dt \leq 0$

b) $dH/dt = 0$ se e somente se $f(\vec{p}, t)$ é a distribuição de Maxwell - Boltzmann.

A hipótese do estado de caos molecular passa por: Se $f(p, t)$ é a probabilidade de encontrar uma molécula com velocidade p no tempo t , a probabilidade de encontrar simultaneamente uma molécula com velocidade p' no

tempo t é $f(p,t).f(p',t)$. Esta suposição diz respeito a correlação entre duas moléculas e não diz nada acerca da forma da função distribuição. Então o estado que o gás possui em uma dada função distribuição pode ou não pode satisfazer a hipótese do caos molecular.

Quando um gás está em um estado de caos molecular, H é indicado por um pico (Máximo).

Entropia e probabilidade

No livro "The Theory of Heat Radiation" de Max Planck aparece pela primeira vez a relação entre Entropia e Probabilidade.

Sendo S a entropia, W a probabilidade de um sistema físico em um estado definido; então para esse estado proposto temos:

$$S = f(W) \quad (1)$$

Onde $f(W)$ representa um função universal de argumento W . O conceito matemático de probabilidade pode ser aplicado a um sistema físico que consiste em dois sistemas completamente independentes. A probabilidade W será dada pelo produto da probabilidade dos dois sistemas. Se considerarmos, por exemplo, o primeiro sistema como um corpo qualquer na Terra e o segundo sistema como uma cavidade contendo radiação em Sirius, então a probabilidade de que o corpo terrestre tenha um certo estado 1 e simultaneamente a radiação na cavidade e um estado 2 é:

$$W = W_1.W_2 \quad (2)$$

Onde W_1 e W_2 são as probabilidades dos sistemas envolvidos nos estados em questão.

Se agora S_1 , e S_2 são as entropias dos sistemas separados em dois estados, então, de acordo com a equação (1), nós temos:

$$S_1 = f(W_1) \quad \text{e} \quad S_2 = f(W_2)$$

Mas de acordo com o segundo princípio da termodinâmica, a entropia total dos dois sistemas, os quais são independentes uns dos outros, é: $S = S_1 + S_2$ então, utilizando as equações (1) e (2) temos:

$$f(W_1.W_2) = f(W_1) + f(W_2). \quad (3)$$

A partir dessa equação podemos determinar a função f .

Diferenciando ambos os membros da equação (3) com respeito a W_1 e considerando W_2 constante, nós obtemos:

$$W_2 f'(W_1.W_2) = f'(W_1) \quad (4)$$

Em seguida, diferenciando a equação (4) com relação a W_2 , e agora W_1 permanecendo constante, temos:

$$f'(W_1.W_2) + W_1 W_2 f''(W_1.W_2) = 0 \quad \text{ou}$$

$$f(W) + Wf'(W) = 0$$

A integral desta equação diferencial de segunda ordem é :

$$f(W) = k \log W + \text{constante}$$

Portanto, utilizando a equação (1), temos:

$$S = k \log W + \text{constante (5)}$$

A equação (5) mostra como de forma geral a entropia depende da probabilidade. A constante universal de integração k é a mesma para quaisquer sistemas terrestres ou cósmicos, e seu valor tem sido determinado anteriormente e permanece válido até hoje. A segunda constante aditiva de integração pode, sem a menor restrição, ser incluída como uma constante de multiplicação na quantidade W , a qual não está completamente definida aqui, portanto a equação (5) se reduz a:

$$S = k \log W$$

Bibliografia

- SANTORO, A. Evolução do Conceito de Energia, da Lei da Equipartição à Quantização. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Presbiteriana Mackenzie, 1995.
- SANTORO, A. Física Moderna, Universidade Prebiteriana Mackenzie, CAHL, São Paulo, 1981.
- PLANCK, Max. The Theory of Heat Radiation, 3.ed. New York, Dover, 1959.
- CARRINGTON, Gerald. Basic Thermodynamics. New York, Oxford University Press, 1994.
- FLAMM, Dieter. Institut für Theoritiche Physik der Universität Wien, Vienna, Austria, Ludwig Boltzmann – A Pioneer of Modern Physics, paper presented at the XXth International Congress of History of Science, on July 25, 1997, in Liège, Belgium.
- LUDWIG BOLTZMANN. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann. Acesso em 26 jun. 2006.
- LUDWIG BOLTZMANN. Disponível em: http://www.astrocosmo.cl/Biografi/b-l_boltzmann.htm. Acesso em 29 abr. 2006.
- LUDWIG BOLTZMANN. Disponível em: <http://fisica.ufpr.br/thermo/Boltz.html>. Acesso em 29 abr. 2006.
- BOLTZMANN'S WORK IN STATISTICAL PHYSICS. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/statphys-Boltzmann/>. Acesso em 29 abr. 2006.
- BOLTZMANN, LUDWIG. Disponível em: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/boltzmann.html>. Acesso em 29 abr. 2006.
- H – THEOREM. Disponível em: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/H-Theorem.html>. Acesso em 19 mai. 2006.
- BOLTZMANN, LUDWIG. Disponível em: <http://www.infoscience.fr/>

Histoire/biograph/biograph.php3?Ref=71. Acesso em 29 abr. 2006.

LUDWIG BOLTZMANN. Disponível em:

<http://www.corrosion-doctors.org/Biographies/BoltzmannBio.htm>.

Acesso em 30 abr. 2006.

GIBBS, JOSIAH. Disponível em:

<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Gibbs.html>

Acesso em 30 abr. 2006.



REVISTA PRIMUS VITAM